Aritmetica
Definizioni di concetti, regole e proprietà per il 1° anno della scuola media

1) INSIEMI

Concetto primitivo – Un concetto primitivo è un concetto che non viene definito con precisione, ma solo descritto con degli esempi. Questo accade perché non è possibile definire in modo rigoroso tutte le parole della matematica e, in particolare, i termini iniziali come: insieme, numero naturale, punto, retta e piano.

Insieme – *Concetto primitivo*. Descrizione: l'insieme possiamo immaginarlo come un gruppo di oggetti, una raccolta, una collezione. Gli oggetti dell'insieme sono detti elementi e possono essere oggetti concreti come cose, animali o persone, ma anche oggetti astratti come numeri, parole, simboli e figure. La matematica si occupa solo di *insiemi matematici*.

Insieme matematico – Non tutti gli insiemi hanno significato in matematica. Un gruppo di oggetti costituisce un insieme in senso matematico quando è sempre possibile decidere con certezza se un qualsiasi oggetto che ci viene in mente appartiene o non appartiene all'insieme. Non è invece necessario che gli oggetti abbiano un'evidente caratteristica in comune, a parte il fatto stesso di appartenere all'insieme.

Insieme vuoto – L'insieme vuoto è l'insieme che non ha elementi.

Per indicare l'insieme vuoto si usa il simbolo $\emptyset$ che si legge: «insieme vuoto».

Sottoinsieme – Dati due insiemi A e B, si dice che B è sottoinsieme di A se tutti gli elementi di B appartengono anche ad A.

In simboli si scrive $B \subseteq A$

che si legge: «B è sottoinsieme di A» oppure «B è incluso in A».

Il simbolo $\subseteq$ è detto simbolo di inclusione.

Un caso particolare di sottoinsieme si ha quando tutti gli elementi di B appartengono anche ad A ma esistono anche elementi di A che non sono elementi di B.

In quest'ultimo caso si scrive $B \subset A$

che si legge: «B è incluso strettamente in A»

il simbolo $\subset$ è detto simbolo di inclusione stretta.

Sottoinsieme proprio – È un sottoinsieme proprio di A ogni sottoinsieme non vuoto e non uguale ad A.

Sottoinsieme improprio – Sono sottoinsiemi impropri di A l'insieme vuoto e l'insieme A stesso.

Insieme universo – Qualsiasi insieme può essere considerato il *sottoinsieme* di un insieme più ampio che viene detto insieme universo.

Insieme complementare – Consideriamo un insieme A e il suo insieme universo U. Si dice insieme complementare di A l'insieme formato dagli elementi di U che non appartengono ad A.

L'insieme complementare di A si scrive $\overline{A}$

Intersezione tra due insiemi (operazione di) – L'intersezione è un'operazione che associa a due insiemi A e B un terzo insieme C, detto *insieme intersezione*, formato dagli elementi che appartengono sia ad A che a B.

$$A \cap B = C \quad \text{con} \quad C = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$$

che si legge: «A intersecato a B uguale a C»

e «C è l'insieme degli elementi x tali che x appartiene ad A e x appartiene a B».

Unione tra due insiemi (operazione di) – L'unione è un'operazione che associa a due insiemi A e B un terzo insieme C, detto *insieme unione*, formato da tutti gli elementi che appartengono ad A e/o a B.

$$A \cup B = C \quad \text{con} \quad C = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

che si legge: «A unito a B uguale a C».

e «C è l'insieme degli elementi x tali che x appartiene ad A o x appartiene a B».

Differenza tra due insiemi (operazione di) – La differenza è un'operazione che associa a due insiemi A e B un terzo insieme C, detto insieme differenza, formato dagli elementi di A che non appartengono a B.

$$A - B = C \quad \text{(oppure anche } A \setminus B = C \text{) con} \quad C = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

che si legge: «A meno B uguale a C»

e «C è l'insieme degli elementi x tali che x appartiene ad A e x non appartiene a B».

Numero naturale – *Concetto primitivo*. Descrizione: i numeri naturali sono i numeri che servono per contare e costituiscono un *insieme* detto $\mathbb{N}$. L'insieme $\mathbb{N}$ comprende un elemento detto zero e indicato con il simbolo 0 e una serie ordinata e infinita di altri numeri. La serie è ordinata perché tra due numeri naturali è sempre possibile stabilire qual è il maggiore e qual è il minore. La serie è infinita perché di ogni numero naturale esistono il precedente e il successivo, a parte lo zero che non è il successivo di alcun numero e quindi non ha un precedente. L'insieme dei numeri naturali è:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; \ldots\}$$

Contare – Contare significa elencare i numeri naturali in ordine.

2) NUMERI NATURALI* E OPERAZIONI

(* nelle definizioni seguenti diremo semplicemente "numero", ma ci riferiremo sempre e solo ai numeri naturali)

Operazione – L'operazione aritmetica è un procedimento che associa a due numeri dati in un certo ordine, detti termini, un terzo numero, detto risultato, che si ottiene applicando una regola stabilita.

Se *a* e *b* sono i termini e *c* è il risultato, l'operazione si scrive: $a*b=c$ oppure $(a;b)\rightarrow c$

Addizione – L'addizione è un'operazione che associa ai due termini, detti addendi, un risultato, detto somma, che si ottiene così: si contano, a partire dal successivo del primo addendo, tanti numeri consecutivi quanti indicati dal secondo addendo. L'ultimo numero contato è la somma.
Se *a* e *b* sono gli addendi e *c* è la somma, l'addizione si scrive: $a+b=c$.

Per esempio, $8+3=11$ si legge: «otto più tre uguale a undici».

Moltiplicazione – La moltiplicazione è un'operazione che associa a due termini, detti fattori, un risultato, detto prodotto, che si ottiene addizionando tanti addendi uguali al primo fattore quanti indicati dal secondo fattore.
Se *a* e *b* sono i fattori e *c* è il prodotto, la moltiplicazione si scrive: $a\times b=c$ oppure $a\cdot b=c$.

Per esempio, $8\cdot 3=24$ si legge: «otto per tre uguale a ventiquattro».

Sottrazione – La sottrazione è un'operazione che associa a due termini, detti minuendo e sottraendo, un risultato, detto differenza, che se è addizionato al sottraendo dà come somma il minuendo.
Se *c* e *b* sono minuendo e sottraendo e *a* è la differenza, la sottrazione si scrive: $c-b=a$.

Per esempio, $11-3=8$ si legge: «undici meno tre uguale a otto».

Divisione – La divisione è un'operazione che associa a due termini, detti dividendo e divisore, un risultato detto quoziente, che se è moltiplicato al divisore dà come prodotto il dividendo.
Se *c* e *b* sono dividendo e divisore e *a* è il quoziente, la divisione esatta si scrive: $c:b=a$.

Per esempio, $24:3=8$ si legge: « ventiquattro diviso tre uguale a otto».

Proprietà commutativa – Un'operazione possiede la proprietà commutativa se invertendo l'ordine dei termini il risultato non cambia.

$$a*b=b*a$$

Proprietà associativa – Un'operazione possiede la proprietà associativas se, in due operazioni consecutive, invertendo l'ordine di esecuzione il risultato non cambia.

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

Proprietà dissociativa – vedi *Proprietà associativa*.

Proprietà invariantiva della sottrazione – Se a entrambi i termini della sottrazione si addiziona o si sottrae uno stesso numero, il risultato non cambia.

$$a-b=(a\pm n)-(b\pm n)$$

Proprietà invariantiva della divisione – Se a entrambi i termini della divisione si moltiplica o si divide uno stesso numero diverso da zero, il risultato non cambia.

$$a:b=(a\cdot n):(b\cdot n)\quad \text{con } n\neq 0$$

$$a:b=(a:n):(b:n)\quad \text{con } n\neq 0$$

Proprietà distributiva della moltiplicazione – Moltiplicare un numero per una somma (o differenza) è uguale a moltiplicare quel numero per entrambi i termini della somma (o differenza) e poi addizionare (o sottrarre) i prodotti ottenuti.

$$n\cdot(a\pm b)=n\cdot a\pm n\cdot b$$

Raccoglimento a fattor comune – vedi *Proprietà distributiva della moltiplicazione*.

Elevamento a potenza – L'elevamento a potenza è un'operazione che associa a due termini, detti base ed esponente, un risultato, detto potenza, che si ottiene moltiplicando tanti fattori uguali alla base quanti indicati dall'esponente.
Se *a* e *b* sono base ed esponente e *c* è la potenza, l'elevamento a potenza si scrive: $a^b=c$.

Per esempio, $2^3=8$ si legge: «due alla terza uguale a otto».

Estrazione di radice – L'estrazione di radice è un'operazione che associa a due termini, detti argomento e indice, un risultato, detto radice, che se è elevato all'indice dà come risultato l'argomento.

Se *b* e *c* sono l'indice e l'argomento, l'estrazione di radice si scrive: $\sqrt[b]{c}=a$

Per esempio, $\sqrt[3]{8}=2$ si legge «radice terza di otto uguale a due»

Logaritmo – L'operazione di logaritmo associa a due termini, detti base e argomento, un risultato detto logaritmo che è l'esponente a cui si deve elevare la base per ottenere l'argomento.

Se *a* è la base e *c* è l'argomento, l'operazione di logaritmo si scrive $\log_a c=b$

Per esempio, $\log_2 8=3$ si legge : «il logaritmo in base due di otto è uguale a tre».

Proprietà delle potenze (prima) – Il prodotto di due potenze che hanno la stessa base è uguale a una potenza che ha la stessa base e per esponente la somma degli esponenti

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

Proprietà delle potenze (seconda) – Il quoziente di due potenze che hanno la stessa base è uguale a una potenza che ha la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti

$$a^m:a^n=a^{m-n}$$

Proprietà delle potenze (terza) – La potenza di una potenza è uguale a una potenza che ha la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti

$$(a^m)^n=(a)^{m\cdot n}$$

Proprietà delle potenze (quarta) – Il prodotto di due potenze che hanno lo stesso esponente è uguale a una potenza che ha lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$$

Proprietà delle potenze (quinta) – Il quoziente di due potenze che hanno lo stesso esponente è uguale a una potenza che ha lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi

$$a^n : b^n = (a:b)^n$$

Multiplo – Dati due numeri naturali a e b, se la divisione a:b ha resto 0, allora si dice che a è multiplo di b oppure che a è divisibile per b, e viceversa che b è sottomultiplo di a oppure che b è divisore di a

Numero primo – Un numero, diverso da 1, si dice primo quando è *divisibile* solo per se stesso e per 1.

Criterio di divisibilità per 2 – Un numero è *divisibile* per 2 quando termina con una cifra pari.

Criterio di divisibilità per 3 – Un numero è *divisibile* per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3.

Criterio di divisibilità per 4 – Un numero è *divisibile* per 4 se le sue ultime due cifre formano un multiplo di 4

Criterio di divisibilità per 5 – Un numero è *divisibile* per 5 se termina con le cifre 0 oppure 5.

Criterio di divisibilità per 9 – Un numero è *divisibile* per 9 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 9.

Criterio di divisibilità per 10, 100, 1000, ecc. – Un numero è *divisibile* per 10, 100, 1000, ecc. quando temina con uno, due, tre zeri, ecc.

Criterio di divisibilità per 11 – Un numero è *divisibile* per 11 se la differenza tra le cifre di posto pari e le cifre di posto dispari (o viceversa) è un multiplo di 11.

Criterio di divisibilità per 4 – Un numero è *divisibile* per 25 se le sue ultime due cifre formano un multiplo di 25

Massimo comun divisore (MCD) – Il massimo comun divisore (abbreviato in MCD) di due o più numeri è il più grande tra i loro *divisori* comuni.

Minimo comune multiplo (mcm) – Il minimo comune multiplo (abbreviato in mcm) di due o più numeri è il più piccolo tra i loro *multipli* comuni escluso lo zero.

Numeri primi fra loro – Due o più numeri si dicono primi tra loro quando il loro *MCD* è 1.

Teorema fondamentale dell'aritmetica – Ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 è il prodotto di potenze di numeri primi. La scomposizione in fattori primi di ogni numero è unica.

3) FRAZIONI

Unità frazionaria (detta anche frazione unitaria) – Prendiamo un insieme di oggetti o una proprietà misurabile qualsiasi (una lunghezza, un'area, un volume, un peso, un intervallo di tempo, ecc.) che chiameremo intero e dividiamo questo intero in parti uguali. L'unità frazionaria è una qualsiasi delle parti uguali in cui è stato diviso l'intero.

Se d è il numero di parti uguali dell'intero, l'unità frazionaria si scrive $\frac{1}{d}$.

Per esempio, $\frac{1}{4}$ si legge: «uno fratto quattro» oppure «un quarto».

La linea che separa l'uno dal numero sottostante è detta linea di frazione.

Frazione – La frazione è una quantità pari a un numero qualsiasi di *unità frazionarie*. Viene rappresentata da una coppia di numeri naturali che sono detti termini della frazione e più precisamente denominatore e numeratore.

Il denominatore indica il numero di parti uguali in cui è stato diviso l'intero. Il numeratore indica quante unità frazionarie uguali sono state prese in considerazione.

La frazione è anche detta "la parte", in contrapposizione all'intero che è anche detto "il tutto"

Se *d* è il denominatore ed *n* è il numeratore, la frazione si scrive:

$\frac{n}{d}$ che significa → *n volte* $\frac{1}{d}$ cioè → $n \cdot \frac{1}{d}$.

Per esempio:

$\frac{3}{4}$ si legge: «tre fratto quattro» oppure «tre quarti» e significa 3 *volte* $\frac{1}{4}$ cioè $3 \cdot \frac{1}{4}$.

La linea di frazione può essere scritta anche obliqua, quindi $3/4$ è sinonimo di $\frac{3}{4}$

È bene precisare che, quando approfondiremo lo studio delle frazioni, la scrittura $\frac{n}{d}$ assumerà anche **altri significati**, diversi da quello di "parte di un tutto". In particolare la frazione sarà utilizzata per:

– indicare l'operazione di **divisione**, per esempio $\frac{15}{3}$ sarà considerata una scrittura equivalente a $15:3$;

– esprimere il concetto di **rapporto**, per esempio il possesso di 3 cellulari ogni 2 abitanti sarà espresso con $\frac{3}{2}$;

– rappresentare i **numeri razionali**, per esempio $\frac{1}{2}$ sarà considerata una scrittura equivalente a $0{,}5$.

Frazione propria – Una frazione con il numeratore minore del denominatore si dice propria

$$\frac{a}{b} \text{ è propria se } a<b$$

Frazione impropria – Una frazione con il numeratore maggiore o uguale al denominatore si dice impropria

$$\frac{a}{b} \text{ è impropria se } a\geqslant b$$

Frazione apparente – Una frazione con il numeratore multiplo del denominatore si dice apparente

$$\frac{a}{b} \text{ è apparente se } a=nb \text{ con } n\in\mathbb{N}$$

Frazione complementare – Partendo da una frazione propria, la frazione che costituisce la parte mancante per arrivare all'intero si dice frazione complementare della prima.

$$\frac{c}{b} \text{ è complementare di } \frac{a}{b} \text{ se } \frac{a}{b}+\frac{c}{b}=1$$

Frazioni equivalenti – Frazioni costituite da coppie diverse di numeri che però rappresentano la stessa parte dell'intero si dicono frazioni equivalenti.

Frazione inversa – Data una frazione $\frac{a}{b}$, si dice inversa la frazione $\frac{b}{a}$ che si ottiene scambiando numeratore e denominatore

Antonio Guermani, 2012*